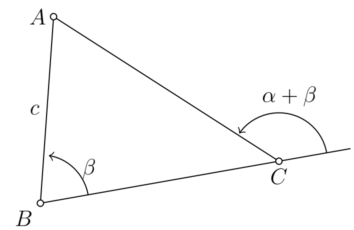
L1 MPCIE Université d'Angers Année universitaire 2025-2026

Travaux dirigés d'Algèbre élémentaire
Feuille 1 : *Trigonométrie*

Exercice 1 (Mesure principale)**.** Calculer le cosinus et le sinus de chacun des angles suivants :

$$\frac{13\pi}{2},\ \frac{11\pi}{3},\ -\frac{9\pi}{4},\ \frac{305\pi}{6},\ \frac{42\pi}{8},\ -\frac{62\pi}{12}.$$

Exercice 2 (Dans un triangle...)**.** On considère la configuration géométrique ci-contre. Exprimer la longueur AC en fonction de $c = AB$ et des angles β et $\alpha + \beta$.



Exercice 3 (... puis dans un rectangle)**.** Dans un rectangle de côtés a et b, avec $b \leq a$, on note θ la mesure de l'angle entre le grand côté et la diagonale (orienté dans le sens trigonométrique). Exprimer $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ en fonction de a et b.

Exercice 4 (Triangle inscrit dans un rectangle)**.** Soit ABC un triangle rectangle en C. Le triangle ABC est inscrit dans un rectangle $ABA'B'$, c'est-à-dire que C appartient au côté $[A'B']$ du rectangle. Calculer en fonction de la longueur $c = AB$ et de la mesure α de l'angle $\widehat{BAC}$ les longueurs AA', AB', $A'C$ et $B'C$.

Exercice 5 (Retrouver deux parmi cos, sin, tan sachant le troisième)**.**

(i) Soit $\theta \in [0, \pi/2[$ tel que $\sin(\theta) = 3/5$. Calculer $\cos(\theta)$ et $\tan(\theta)$.

(ii) Même question lorsque cette fois-ci $\theta \in]\pi/2, \pi]$.

(iii) Soit $\theta \in]\pi/2, 3\pi/2[$ tel que $\tan(\theta) = -\sqrt{3}/3$. Calculer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 6 (Equations trigonométriques I)**.** Trouver toutes les solutions des équations suivantes :

(i) $2\cos(2x) - \sqrt{3} = 0$

(ii) $2\sin(3x) - \sqrt{2} = 0$

(iii) $3\tan(4x) - \sqrt{3} = 0$

Exercice 7 (Equations trigonométriques II)**.** Trouver toutes les solutions des équations suivantes :

(i) $\sin(5x) = \sin(x + 2\pi/3)$

(ii) $\cos(x + \pi/4) = \cos(2x)$

(iii) $\tan(x + \pi/4) = \tan(2x)$

(iv) $\cos(x + \pi/3) = \sin(x + \pi/4)$

Exercice 8 (Equations trigonométriques III)**.** Trouver toutes les solutions des équations suivantes :

(i) $2\sin^2(x) = 1 - \sin(x)$

(ii) $\cos(x) - \sin(x) = 1$

(iii) $\cos(2x) + \cos(x) = 0$

(iv) $\sin(2x) + \sin(x) = 0$

(v) $\tan(2x) = 2\sin(x)$

(vi) $\sin(x/2) + \cos(x) = 1$

Exercice 9 (Formules de trigonométrie)**.** Montrer les identités suivantes. On précisera pour quelles valeurs de θ elles sont valables.

(i) $\cos^2(\theta)(1 + \tan^2(\theta)) = (1 - \sin^2(\theta))(1 + \tan^2(\theta)) = 1$

(ii) $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$ et $\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$ (formules de triplement de l'angle)

(iii) $\cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$ et $\sin(4\theta) = 4\sin(\theta)\cos^3(\theta) - 4\sin^3(\theta)\cos(\theta)$ (formules de quadruplement de l'angle)

(iv) $\dfrac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

(v) $\dfrac{1}{\tan(\theta)} - \tan(\theta) = \dfrac{2}{\tan(2\theta)}$

Exercice 10 (Cosinus, sinus, tangente et angle moitié)**.** Soit $\theta \in\ ]-\pi, \pi[$. On pose $t = \tan(\theta/2)$. Montrer que

$$\cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ \sin(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2} \text{ et } \tan(\theta) = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Exercice 11 (Valeurs remarquables I)**.**

(i) Déterminer $\cos(\pi/8)$, $\sin(\pi/8)$ et $\tan(\pi/8)$.

(ii) En déduire $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ pour $\theta = 3\pi/8$, $5\pi/8$ et $7\pi/8$.

(iii) Recommencer l'exercice avec $\theta = \pi/12$ et ses multiples.

Exercice 12 (Valeurs remarquables II)**.**

(i) Montrer que $\sin(2\pi/5) = \sin(3\pi/5)$.

(ii) En déduire que le nombre $\cos(\pi/5)$ est solution d'une équation simple du second degré. [On pourra utiliser les formules de doublement et triplement de l'angle.]

(iii) Montrer que $\cos(\pi/5) = (1 + \sqrt{5})/4$.

Exercice 13 (Equations trigonométriques IV)**.** Trouver toutes les solutions des équations suivantes :

(i) $\cos(x+\pi/6)\cos(x-\pi/6) = 1/2$

(ii) $\cos(2x) - \cos(x) = \sin(x) + \sin(2x)$

Exercice 14 (Polygone régulier)**.** Soit n un entier ≥ 3. On considère un polygone régulier à n côtés tous de longueur 1.

(i) Quelle est la mesure de chacun de ses angles ?

(ii) On note $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit de ce polygone. Quel est le rayon de $\mathcal{C}$?

(iii) On note $\mathcal{C}'$ le cercle inscrit de ce polygone qui passe par le milieu de chacun de ses côtés. Quel est le rayon de $\mathcal{C}'$?

Exercice 15 (Théorème d'Al Kashi)**.** Dans un triangle ABC quelconque, on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On se propose de montrer le théorème d'Al Kashi, qui dit que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{BAC}.$$

(i) Quel résultat retrouve-t-on lorsque le triangle ABC est rectangle en A ?

Soit O le pied de la hauteur passant par B. On note $h = OB$ et $x = OA$.

(ii) On suppose ici que le point O appartient au segment $[AC]$. En travaillant dans les triangles rectangles BCO et BOA, montrer le théorème d'Al Kashi.

(iii) Comment doit-on modifier le raisonnement lorsque le point O se trouve à l'extérieur du segment $[AC]$?

Solution de l'Exercice 1. On travaille modulo 2π afin de retrouver la mesure principale (appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$) de chaque angle et en déduire son cosinus et son sinus. Ainsi

$$\cos\left(\frac{13\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{13\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{11\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

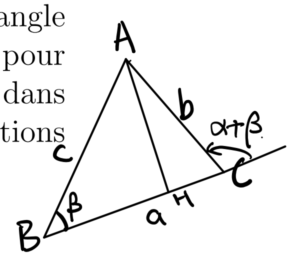
$$\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\left(\frac{305\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(\frac{305\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\cos\left(\frac{42\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\left(\frac{42\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

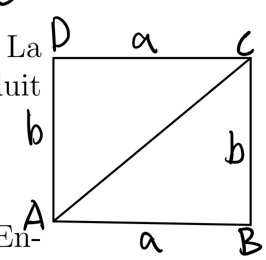
$$\text{et } \cos\left(-\frac{62\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(-\frac{62\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Solution de l'Exercice 2. On introduit la hauteur issue de A dans le triangle ABC, et on note H le pied de cette hauteur. En utilisant la définition de $\sin(\beta)$ dans le triangle ABH, on obtient $AH = c\sin(\beta)$. Par ailleurs, l'angle en C dans le triangle ABC a pour mesure $\pi - \alpha - \beta$, donc en utilisant la définition de $\sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$ dans le triangle ACH, on trouve $AH = AC\sin(\alpha + \beta)$. En regroupant les deux équations vérifiées par AH, on obtient



$$AC = c\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Solution de l'Exercice 3. Notons $ABCD$ ce rectangle, avec $[AB]$ un grand côté. La diagonale $[AC]$ a pour longueur $\sqrt{a^2 + b^2}$, par le théorème de Pythagore. On en déduit



$$\cos(\theta) = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \sin(\theta) = \frac{BC}{AC} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{b}{a}.$$

Solution de l'Exercice 4. On a d'abord $AC = c\cos(\alpha)$ et $BC = c\sin(\alpha)$. Ensuite $AB' = AC\cos(\pi/2 - \alpha) = AC\sin(\alpha) = c\cos(\alpha)\sin(\alpha)$. Le théorème de Pythagore donne maintenant $AA' = \sqrt{AB^2 + A'B^2} = c\sqrt{1 + \cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha)}$. Enfin $B'C = AC\sin(\pi/2 - \alpha) = AC\cos(\alpha) = c\cos^2(\alpha)$ puis $A'C = A'B' - B'C = c(1 - \cos^2(\alpha)) = c\sin^2(\alpha)$.

Solution de l'Exercice 5. (i) Puisque $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, on trouve $\cos^2(\theta) = 16/25$, soit $|\cos(\theta)| = 4/5$. Etant donné que $\theta \in [0, \pi/2[$, on obtient $\cos(\theta) = 4/5$. Par conséquent $\tan(\theta) = 3/4$.

(ii) On a toujours $|\cos(\theta)| = 4/5$, mais puisque $\theta \in]\pi/2, \pi]$, on obtient cette fois-ci $\cos(\theta) = -4/5$ et $\tan(\theta) = -3/4$.

Remarque Exer5 iii) Ici on trouve $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ à l'aide de valeur remarquable. Vous trouverez à page 12 une méthode générale.

(iii) Puisque la fonction tan est $\pi-$périodique, et que la solution de l'équation $\tan(x) = -\sqrt{3}/3$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$ est $x = -\pi/6$, on trouve $\theta = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$.

Solution de l'Exercice 6. Dans ce type d'exercice comme dans toute résolution d'équation, on commence d'abord par déterminer le domaine de résolution avant de résoudre. On prendra soin d'éliminer toute valeur interdite de l'ensemble des solutions potentielles.

(i) On réécrit cette équation $\cos(2x) = \sqrt{3}/2$. On sait alors que $2x$ vaut $\pi/6$ (mod 2π) ou $-\pi/6$ (mod 2π) par $2\pi-$périodicité de cos, c'est-à-dire que $2x = \pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou $2x = -\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, l'ensemble des solutions est $\{\pi/12 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\pi/12 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) On réécrit cette équation $\sin(3x) = \sqrt{2}/2$. On sait alors que $3x$ vaut $\pi/4$ (mod 2π) ou $3\pi/4$ (mod 2π) par $2\pi-$périodicité de sin, c'est-à-dire que $3x = \pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou $3x = 3\pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, l'ensemble des solutions est $\{\pi/12 + 2k\pi/3, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/4 + 2k\pi/3, k \in \mathbb{Z}\}$.

(iii) On réécrit cette équation $\tan(4x) = \sqrt{3}/3$. Cette équation n'a de sens que lorsque $4x$ n'est pas de la forme $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire lorsque $x \notin \{\pi/8 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}$. Ensuite, l'équation revient à ce que $4x$ vaille $\pi/6$ (mod π) par $\pi-$périodicité de tan, c'est-à-dire $4x = \pi/6 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, l'ensemble des solutions est $\{\pi/24 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$. [Aucune de ces valeurs n'est une valeur interdite pour l'écriture de l'équation.]

Solution de l'Exercice 7. (i) On sait que $\sin(a) = \sin(b)$ si et seulement si $a = b$ (mod 2π) ou $a = \pi - b$ (mod 2π). On trouve alors

$$\begin{aligned} &5x = x + 2\pi/3 + 2k\pi \Leftrightarrow 4x = 2\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } &5x = \pi - (x + 2\pi/3) + 2k\pi = \pi/3 - x + 2k\pi \Leftrightarrow 6x = \pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est ainsi

$$\{\pi/6 + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/18 + k\pi/3, k \in \mathbb{Z}\}.$$

(ii) On sait que $\cos(a) = \cos(b)$ si et seulement si $a = b$ (mod 2π) ou $a = -b$ (mod 2π). On trouve alors

$$\begin{aligned} &2x = x + \pi/4 + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pi/4 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } &2x = -x - \pi/4 + 2k\pi \Leftrightarrow 3x = -\pi/4 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est ainsi

$$\{\pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\pi/12 + 2k\pi/3, k \in \mathbb{Z}\}.$$

(iii) L'équation en question n'a de sens que si $x \notin \{\pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/4 + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\} = \{\pi/4 + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$, de sorte que ses deux membres soient correctement définis. Par ailleurs, la fonction tan est $\pi-$périodique et strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$,

donc $\tan(a) = \tan(b)$ si et seulement si $a = b \pmod{\pi}$ et $a, b \notin \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On a ainsi
$$2x = x + \pi/4 + k\pi \Leftrightarrow x = \pi/4 + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$$
d'une part. Puisqu'on a imposé que $x \notin \{\pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \subset \{\pi/4 + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$ d'autre part, on trouve que l'équation en question n'a aucune solution.

(iv) On se ramène d'abord à une équation qui porte uniquement sur la fonction cos ou la fonction sin, grâce à la relation $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$. L'équation devient $\cos(x + \pi/3) = \cos(\pi/4 - x)$, et puisque $\cos(a) = \cos(b)$ si et seulement si $a = b \pmod{2\pi}$ ou $a = -b \pmod{2\pi}$, on obtient
$$\begin{aligned} x + \pi/3 = \pi/4 - x + 2k\pi &\Leftrightarrow x = -\pi/24 + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } x + \pi/3 = x - \pi/4 + 2k\pi &\Leftrightarrow 7\pi/12 = 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$
La dernière équation n'a bien entendu pas de solution. L'ensemble des solutions de l'équation est donc
$$\{-\pi/24 + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.$$
Solution de l'Exercice 8. (i) On peut résoudre cette équation en reconnaissant une équation du second degré en $X = \sin(x)$. L'équation devient $2X^2 + X - 1 = 0$, dont le discriminant est 9 et les solutions sont $X_1 = -1$ et $X_2 = 1/2$. On résout alors $\sin(x) = -1$ d'une part, ce qui donne $x \in \{-\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et $\sin(x) = 1/2$, ce qui donne $x \in \{\pi/6 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5\pi/6 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. L'ensemble des solutions est donc
$$\{\pi/6 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5\pi/6 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$
[On peut également résoudre l'équation en écrivant $1 - 2\sin^2(x) = \cos(2x)$ et en ramenant l'équation ainsi obtenue à une équation uniquement en cos ou sin.]

(ii) Les formules de duplication $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ et $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ donnent
$$\begin{aligned} \cos(x) - \sin(x) = 1 &\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2(x/2) - 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 1 \\ &\Leftrightarrow \sin(x/2)(\cos(x/2) + \sin(x/2)) = 0. \end{aligned}$$
Cette équation est vérifiée si et seulement si $\sin(x/2) = 0$, ce qui donne $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou si $\cos(x/2) = -\sin(x/2)$. Dans ce dernier cas, la relation $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin(\theta)$ donne alors $\cos(x/2) = \cos(x/2 + \pi/2)$. On obtient ainsi $x/2 = x/2 + \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (ce qui est bien évidemment impossible) ou $x/2 = -x/2 - \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $x = -\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Finalement, l'ensemble des solutions est
$$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$
(iii) L'équation en question est équivalente à $\cos(2x) = -\cos(x) = \cos(x + \pi)$. Ainsi $2x = x + \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $2x = -x - \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d'où on déduit l'ensemble des solutions
$$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\pi/3 + 2k\pi/3, k \in \mathbb{Z}\} = \{-\pi/3 + 2k\pi/3, k \in \mathbb{Z}\}.$$

(iv) On utilise la formule de duplication $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ afin d'obtenir l'équation $\sin(x)(2\cos(x) + 1) = 0$. Cette équation est vérifiée si et seulement si $\sin(x) = 0$, auquel cas $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou $\cos(x) = -1/2$, auquel cas $x = 2\pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = 4\pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est alors

$$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2\pi/3 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{4\pi/3 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

(v) L'équation en question n'a de sens que lorsque $2x$ n'est pas de la forme $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire lorsque $x \notin \{\pi/4 + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$. Ensuite

$$\tan(2x) = 2\sin(x) \Leftrightarrow \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = 2\sin(x) \Leftrightarrow \frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos(2x)} = \sin(x).$$

L'équation est bien sûr vérifiée lorsque $\sin(x) = 0$, c'est-à-dire $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Sinon, on obtient

$$\frac{\cos(x)}{\cos(2x)} = 1 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(x).$$

Cette équation est vérifiée si et seulement si $2x = x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $2x = -x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On trouve donc un ensemble de solutions de la forme

$$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi/3, k \in \mathbb{Z}\} = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi/3, k \in \mathbb{Z}\}.$$

[Aucune des valeurs de cet ensemble de solutions n'est une valeur interdite pour l'écriture de l'équation.]

(vi) On peut par exemple utiliser la formule de duplication $\cos(x) = 1 - 2\sin^2(x/2)$ afin d'obtenir

$$\sin(x/2) + \cos(x) = 1 \Leftrightarrow \sin(x/2) - 2\sin^2(x/2) = 0 \Leftrightarrow \sin(x/2)(1 - 2\sin(x/2)) = 0.$$

Cette équation est vérifiée si et seulement si $\sin(x/2) = 0$, soit $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou $\sin(x/2) = 1/2$, soit $x = \pi/3 + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = 5\pi/3 + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est donc

$$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/3 + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5\pi/3 + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Solution de l'Exercice 9. (i) On utilise la définition de tan :

$$1 + \tan^2(\theta) = 1 + \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{1}{\cos^2(\theta)}.$$

Ainsi $\cos^2(\theta)(1 + \tan^2(\theta)) = 1$, et puisque $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, on a $(1 - \sin^2(\theta))(1 + \tan^2(\theta)) = 1$ également. Ces égalités sont valables partout où tan est bien définie, c'est-à-dire pour $\theta \notin \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque : Cet identité est importante. On divise souvent par "$\cos^2\theta$" ou "$\cos\theta$" pour avoir "tan"

(ii) On écrit $\cos(3\theta) = \cos(2\theta + \theta)$ et $\sin(3\theta) = \sin(2\theta + \theta)$ et on utilise les formules d'addition puis les formules de duplication. On trouve

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) = \cos(2\theta + \theta) &= \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta)\\ &= (2\cos^2(\theta) - 1)\cos(\theta) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta)\\ &= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2(1 - \cos^2(\theta))\cos(\theta)\\ &= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(3\theta) = \sin(2\theta + \theta) &= \sin(2\theta)\cos(\theta) + \cos(2\theta)\sin(\theta)\\ &= 2\sin(\theta)\cos^2(\theta) + (1 - 2\sin^2(\theta))\sin(\theta)\\ &= 2\sin(\theta)(1 - \sin^2(\theta)) + \sin(\theta) - 2\sin^3(\theta)\\ &= 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta).\end{aligned}$$

Ces égalités sont valables quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$. [On aurait également pu utiliser la relation $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$ pour retrouver la formule portant sur $\sin(3\theta)$ à partir de celle portant sur $\cos(3\theta)$.]

(iii) On utilise deux fois les formules de duplication :

$$\begin{aligned}\cos(4\theta) = 2\cos^2(2\theta) - 1 &= 2(2\cos^2(\theta) - 1)^2 - 1\\ &= 2(4\cos^4(\theta) - 4\cos^2(\theta) + 1) - 1\\ &= 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(4\theta) &= 2\sin(2\theta)\cos(2\theta)\\ &= 2\sin(\theta)\cos(\theta)(2\cos^2(\theta) - 1) + 2\sin(\theta)\cos(\theta)(1 - 2\cos^2(\theta))\\ &= 4\sin(\theta)\cos^3(\theta) - 4\sin^3(\theta)\cos(\theta).\end{aligned}$$

(iv) Pour que $\sin(\theta)$ soit non nul, il faut et il suffit que θ ne soit pas de la forme $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, les formules de duplication donnent

$$\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \tan(\theta/2).$$

(v) Pour que $\tan(\theta)$ soit bien défini et non nul, il faut et il suffit que $\theta \notin \{k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$. Pour de telles valeurs de θ,

$$\frac{1}{\tan(\theta)} - \tan(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}{\cos(\theta)\sin(\theta)} = 2\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} = \frac{2}{\tan(2\theta)}.$$

Solution de l'Exercice 10. On a tout d'abord

$$1 + t^2 = 1 + \tan^2(\theta/2) = \frac{1}{\cos^2(\theta/2)}.$$

Ensuite
$$1-t^2 = 1-\tan^2(\theta/2) = \frac{\cos^2(\theta/2)-\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{\cos(\theta)}{\cos^2(\theta/2)}$$
grâce à la formule de duplication $\cos(2x) = \cos^2(x)-\sin^2(x)$. Enfin
$$2t = 2\tan(\theta/2) = \frac{2\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta/2)}$$
en utilisant la formule de duplication $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. De tout ceci on déduit
$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{2t}{1-t^2}.$$
[On pouvait retrouver cette dernière égalité en utilisant directement la formule de duplication pour la fonction tan.]

Solution de l'Exercice 11. (i) On utilise la formule de duplication $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)-1$, pour obtenir
$$\cos(\pi/4) = 2\cos^2(\pi/8)-1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2(\pi/8)-1 \Leftrightarrow \cos^2(\pi/8) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$
Puisque $\cos(\pi/8) > 0$ (car cos est strictement positive sur $]0,\pi/2[$), on obtient
$$\cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$
On utilise ensuite l'égalité $\sin^2(\pi/8) = 1-\cos^2(\pi/8)$, afin d'obtenir
$$\sin^2(\pi/8) = 1-\frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$
Puisque $\sin(\pi/8) > 0$ (car sin est aussi strictement positive sur $]0,\pi/2[$), on obtient
$$\sin(\pi/8) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$
Enfin
$$\tan(\pi/8) = \frac{\sin(\pi/8)}{\cos(\pi/8)} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$
(ii) On sait que $\cos(\pi/2-x) = \sin(x)$ et $\sin(\pi/2-x) = \cos(x)$, d'où on tire
$$\cos(3\pi/8) = \sin(\pi/8) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin(3\pi/8) = \cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$
Ensuite, $\cos(\pi/2+x) = -\sin(x)$ et $\sin(\pi/2+x) = \cos(x)$, donc
$$\cos(5\pi/8) = -\sin(\pi/8) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin(5\pi/8) = \cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Remarque : On peut aussi trouver la valeur trigo de $\frac{5\pi}{12}$ ou $\frac{7\pi}{12}$ en appliquant formule d'addition et valeur remarquable.
Observons que : $\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$
(On trouve la valeur trigo de $\frac{2\pi}{3}$ par symétrie ($\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$).)

Enfin, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, donc

$$\cos(7\pi/8) = -\cos(\pi/8) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin(7\pi/8) = \sin(\pi/8) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Par conséquent

$$\tan(3\pi/8) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1, \ \tan(5\pi/8) = -\sqrt{2}-1 \text{ et } \tan(7\pi/8) = 1-\sqrt{2}.$$

(iii) Cette fois-ci

$$\cos(\pi/6) = 2\cos^2(\pi/12) - 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos^2(\pi/12) - 1 \Leftrightarrow \cos^2(\pi/12) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Puisque $\cos(\pi/12) > 0$, on obtient

$$\cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Ensuite

$$\sin^2(\pi/12) = 1 - \cos^2(\pi/12) = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Puisqu'encore une fois $\sin(\pi/12) > 0$, on obtient

$$\sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Enfin

$$\tan(\pi/12) = \frac{\sin(\pi/12)}{\cos(\pi/12)} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}.$$

De tout ceci on déduit

$$\cos(5\pi/12) = \sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \text{ et } \sin(5\pi/12) = \cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},$$

puis

$$\cos(7\pi/12) = -\sin(\pi/12) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \text{ et } \sin(7\pi/12) = \cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

et enfin

$$\cos(11\pi/12) = -\cos(\pi/12) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \text{ et } \sin(11\pi/12) = \sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Par conséquent

$$\tan(5\pi/12) = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}, \ \tan(7\pi/12) = -2-\sqrt{3} \text{ et } \tan(11\pi/12) = -2+\sqrt{3}.$$

Solution de l'Exercice 12. (i) On sait que $\sin(x) = \sin(\pi - x)$, donc $\sin(2\pi/5) = \sin(\pi - 2\pi/5) = \sin(3\pi/5)$.

(ii) On a vu dans un exercice précédent que $\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $\theta = \pi/5$. En utilisant la question précédente et une formule de duplication, on trouve

$$2\sin(\theta)\cos(\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta).$$

Puisque $\sin(\theta) \neq 0$, on obtient

$$2\cos(\theta) = 3 - 4\sin^2(\theta) = 3 - 4(1 - \cos^2(\theta)) = 4\cos^2(\theta) - 1$$

ce qui signifie que $4\cos^2(\pi/5) - 2\cos(\pi/5) - 1 = 0$.

(iii) Le discriminant de cette équation est $20 = 4 \times 5$, donc les solutions possibles sont $(1 + \sqrt{5})/4$ et $(1 - \sqrt{5})/4$. Puisque $\cos(\pi/5) > 0$, on a $\cos(\pi/5) = (1 + \sqrt{5})/4$.

Solution de l'Exercice 13. (i) Paget *** On utilisera la formule de produit-somme et somme-produit.

(ii) ***

Solution de l'Exercice 14. (i) On note O le centre du cercle circonscrit à ce polygone et $A_1, \dots, A_n$ ses sommets. Alors chaque angle de la forme $\widehat{A_k O A_{k+1}}$ a pour mesure $2\pi/n$. Puisque OA_kA_{k+1} est un triangle isocèle, on obtient $\widehat{OA_kA_{k+1}} = (n-2)\pi/(2n)$, et donc chaque angle du polygone a pour mesure $(n-2)\pi/n$.

(ii) Le rayon R du cercle circonscrit est la longueur OA_1. On construit la hauteur issue de O dans le triangle OA_1A_2, qui a pour pied H, le milieu de $[A_1A_2]$. Alors $\sin(\widehat{HOA_1}) = A_1H/OA_1 = 1/(2OA_1)$, et puisque $\widehat{HOA_1}$ a pour mesure π/n, on trouve $R = OA_1 = 1/(2\sin(\widehat{HOA_1})) = 1/(2\sin(\pi/n))$.

(iii) Le rayon du cercle inscrit n'est rien d'autre que la longueur OH. On a $\tan(\widehat{HOA_1}) = A_1H/OH = 1/(2OH)$, donc $OH = 1/(2\tan(\pi/n))$.

Solution de l'Exercice 15. (i) Lorsque le triangle ABC est rectangle en A, on retrouve l'égalité $a^2 = b^2 + c^2$, qui n'est rien d'autre que le théorème de Pythagore.

(ii) Dans le triangle BCO, on trouve $a^2 = h^2 + (b-x)^2$. Dans le triangle BOA, on a $c^2 = h^2 + x^2$ et $\cos\widehat{BAC} = x/c$, donc $x = c\cos\widehat{BAC}$. Ainsi

$$a^2 = h^2 + (b-x)^2 = b^2 + h^2 + x^2 - 2bx = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{BAC}$$

comme annoncé.

(iii) Lorsque O est hors du segment $[AC]$, on travaille dans les deux mêmes triangles, mais les relations qu'on obtient sont différentes. Par exemple, lorsque O appartient à la demi-droite $[CA)$, on a toujours $c^2 = h^2 + x^2$, mais la longueur OC vaut $b + x$, et on doit utiliser l'angle $\widehat{BAO} = \pi - \widehat{BAC}$ dans le triangle BOA plutôt que $\widehat{BAC}$.

Exercice 5 iii) On a identité $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

En divisant tous les termes par $\cos^2\theta$, on obtient $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Par hypothèse, $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, alors $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1+(-\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{4}{3}$

On obtient $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$. alors $\cos\theta = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$. Étant donné que $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, on a $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Alors, par définition de tangente, $\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta = (-\frac{\sqrt{3}}{3})\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2}$.

Remarque. On utilise toujours l'identité $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ou $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ pour retrouver deux parmi cos, sin, tan sachant le troisième. On prendra soin du "signe", qui est dépend souvent de l'intervalle de l'angle.

Exercice 13

On remontre d'abord les formules de "produit-somme" et "somme-produit".

Prop1 : $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$ ③, $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$ ④

Dém : Rappelons formule d'addition : $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ ①

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ ②.

① + ② $\Rightarrow \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$.

En dévisant tous les terms par 2, on obtient la proposition.

Cor1 $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

Dém : ② − ①.

Prop2 $\cos(x)+\cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$

$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

Dém. On observe que $x = \frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$ $y = \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$

On prend $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$ dans la formule Prop1 ③

Alors, $2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}) = \cos(x)+\cos(y)$.

De même, en prenant $\alpha = \frac{x+y}{2}$ et $\beta = \frac{x-y}{2}$ au cor1, on obtient

$-2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2}) = \cos(x)-\cos(y)$.

Prop3 $\sin(x)+\sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$

Dém.

Prend $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$ dan la formule prop ④

i) On prend $\alpha = x+\frac{\pi}{6}$, $\beta = x-\frac{\pi}{6}$ à la prop 1 ③.

Alors $\cos(x+\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\cos\left((x+\frac{\pi}{6})-(x-\frac{\pi}{6})\right) + \frac{1}{2}\cos\left((x+\frac{\pi}{6})+(x-\frac{\pi}{6})\right)$

$= \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

(i) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}+k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

ii) En appliquant prop 2 la gauche $= -2\sin(\frac{3x}{2})\sin(\frac{x}{2})$.

En appliquant prop3 la droite $= 2\sin(\frac{3x}{2})\cos(\frac{x}{2})$

ii) $\Leftrightarrow -2\sin(\frac{3x}{2})\sin(\frac{x}{2}) = 2\sin(\frac{3x}{2})\cos(\frac{x}{2})$.

$\Leftrightarrow \sin(\frac{3x}{2})\cos(\frac{x}{2}) + \sin(\frac{3x}{2})\sin(\frac{x}{2}) = 0$.

$\Leftrightarrow \sin(\frac{3x}{2})\left(\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2})\right) = 0$.

Alors soit $\sin(\frac{3x}{2}) = 0$, soit $\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2}) = 0$.

Cas 1 $\sin(\frac{3x}{2}) = 0$.

$\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 2k\pi$ ou $\pi+2k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{4k\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3}$.

Cas 2 $\cos(\frac{x}{2}) = -\sin(\frac{x}{2})$

$\Leftrightarrow \cos(\frac{x}{2}) = -\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})$

$\Leftrightarrow \cos(\frac{x}{2}) = \cos(\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})$.

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2}-\frac{x}{2}+2k\pi$ ou $\frac{x}{2} = -\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}+2k\pi$, $\forall k\in\mathbb{Z}$

(n'a aucune solution)

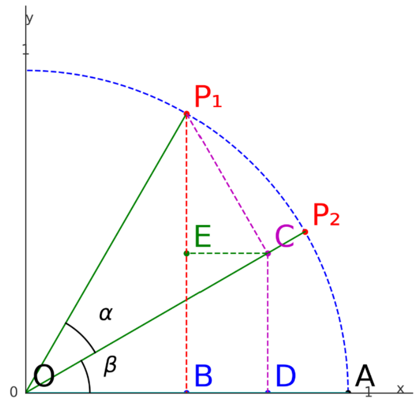
$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}\pi+2k\pi$, $\forall k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de (ii) sont $x = \frac{4k\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3}$ ou $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $\forall k\in\mathbb{Z}$

Travaux dirigés d'algèbre élémentaire

Feuille 1b : Trigonométrie

Exercice 16 (Formule d'addition). On considère la figure suivante, construite dans le premier quadrant :



Les points sont définis comme suit :

- O est l'origine, $A(1,0)$ est sur l'axe des abscisses ;
- le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1 ;
- deux points P_2 et P_1 appartenant au cercle trigonométrique tels que $\angle AOP_2 = \beta$ et $\angle P_2OP_1 = \alpha$;
- on note B le pied de la perpendiculaire menée de P_1 sur $[OA]$;
- on note C le pied de la perpendiculaire menée de P_1 sur $[OP_2]$;
- on note D le pied de la perpendiculaire menée de C sur $[OA]$;
- enfin, E est le pied de la perpendiculaire menée de C sur $[P_1B]$.

Travail demandé :

1. Montrer que $\angle CP_1B = \beta$.
2. Exprimer les longueurs P_1E, CE et OC en fonction de α et β.
3. Exprimer CD en fonction de α et β. En déduire la valeur de P_1B.
4. En déduire la formule d'addition :
$$\cos(\alpha+\beta) \quad \text{en fonction de } \cos\alpha, \cos\beta, \sin\alpha, \sin\beta.$$
5. En remplaçant (α,β) respectivement par $(\alpha,-\beta)$, $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha,-\beta\right)$ et $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha,\beta\right)$, en déduire les formules de :
$$\cos(\alpha-\beta), \quad \sin(\alpha+\beta), \quad \sin(\alpha-\beta).$$
6. (Formules de duplication) Déterminer :
$$\cos(2\alpha), \quad \sin(2\alpha).$$
7. Calculer :
$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right), \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

Exercice 16 Le but de 1-4 est de montrer $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

1. On note F le point d'intersection de OP_2 et P_1B.
Alors dans ΔOFB, $\beta + \widehat{OFB} = \frac{\pi}{2}$. Dans ΔFCP_1, $\widehat{CP_1B} + \widehat{CFP_1} = \frac{\pi}{2}$.
On observe que $\widehat{OFB} = \widehat{CFP_1}$, alors $\beta = \widehat{CP_1B}$

2. Dans ΔOCP_1, $|CP_1| = |OP_1| \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$. , $|OC| = |OP_1| \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$
Dans ΔCEP_1, $|P_1E| = |CP_1|\cos(\widehat{CP_1B}) = \sin\alpha \cdot \cos\beta$.
$|CE| = |CP_1|\sin(\widehat{CP_1B}) = \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

3. Dans ΔODC, $|CD| = |OC| \cdot \sin\beta \overset{\text{Question2}}{=} \cos\alpha\sin\beta$.
$|P_1B| = |P_1E| + |EB| = |P_1E| + |CD| = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

4. Dans ΔODC, on a $|OD| = |OC|\cos\beta = \cos\alpha\cos\beta$
$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |CE| = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
D'autre part $|OB| = \cos(\alpha+\beta)$ par defintion.
Alors, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

5. $\cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta)$
$\Leftrightarrow \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.
$\cos((\frac{\pi}{2}-\alpha)+(-\beta)) = \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos(-\beta) - \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin(-\beta)$
$\Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos((\frac{\pi}{2}-\alpha)+\beta) = \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos(\beta) - \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin(\beta)$
$\Leftrightarrow \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

6. $\beta = \alpha$.
$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$; $\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$
$\Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

7. $\cos(\frac{5\pi}{12}) = \cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
$\sin(\frac{5\pi}{12}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\sin(\frac{5\pi}{6}) = 2\sin(\frac{5\pi}{12})\cos(\frac{5\pi}{12}) = 2 \cdot \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}$.

Rem. Trigo $(\frac{2\pi}{3})$ obtient par symétrie ($\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$).
On peut aussi trouver $\sin(\frac{5\pi}{6})$ par symétrie.